Fisica elementare della bici

Luca Fasolo 2 aprile 2020

Le pagine che seguono vorrebbero illustrare alcuni concetti di fisica della bici; in realtà sono poco più che un gioco che mi è servito per ripassare il LaTex che a me è sempre piaciuto, e mi ha permesso di scoprire le librerie di grafica (pgf-tikz) che negli anni '90 non c'erano ancora. E' bello vedere come le cose migliorino e abbiamo a disposizione sempre più strumenti.

Man mano che andavo avanti, ho pensato fosse bello fare in modo che potessero essere lette dai ragazzi , ho provato a dargli una forma molto elementare. La ho già distribuita a qualche amico, danni non mi pare di averne fatti.Non avendo nozioni di pedagogia, non ho bene idea di quale sia l'età adatta per assimilare questi concetti, credo comunque che sia dai sei-sette in su.

Mi sono divertito a scrivere la parte dei vettori come spostamenti sul piano e la parte il teorema di Pitagora tagliando la carta; nulla di originale ma secondo me sono venute bene. Il lavoro da fare è ancora tanto prima di arrivare a vedere effettivamente la fisica della bici... io intanto vado avanti, finchè ho voglia :)

Pubblico la dispensa incompleta perchè magari serve a qualcuno per passare il tempo e magarli farlo passare ai propri bimbi. Mandatemi i commenti su facebook o a luca.fasolo@gmail.com , mi servono di sicuro.

Indice

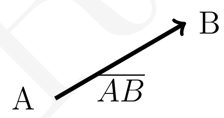
Capitolo 1

Alcune cose che servono

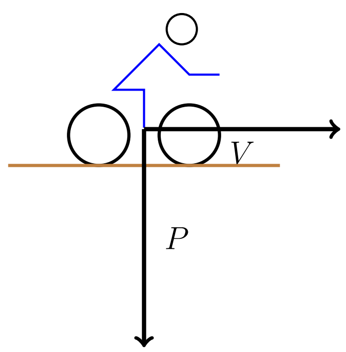
1.1 I vettori

Parleremo di spostamenti e di forze applicate alla bici, quindi dobbiamo trovare un modo di visualizzarle, per capire le formule che man mano impareremo.

Uno spostamento avviene in una certa direzione e con una certa velocità, una forza viene applicata in una certa direzione e con una certa intensità. Dobbiamo quindi trovare un oggetto geometrico che possa rappresentare direzione e intensità. Il **segmento orientato** (che chiameremo per semplicità **vettore**) fa al caso nostro. Il vettore che ha direzione da A a B e ha intensità $\overline{AB}$ si rappresenta così:



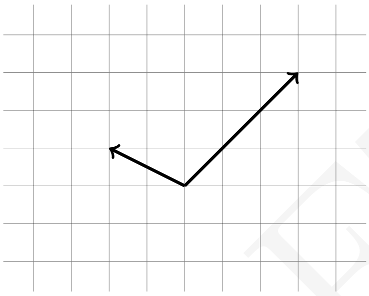
Rappresentiamo Il peso P della bici con un vettore forza verticale; ecco la bici che si sposta a velocità V lungo la strada:



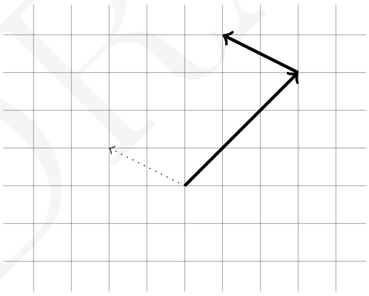
1.2 Sommare i vettori

Alla bicicletta possono essere applicate più forze; pensiamo al vento, alla spinta che produciamo pedalando, alla strada in salita che ci ostacola. Dobbiamo capire come si combinano gli effetti. Dobbiamo cioè imparare a **sommare i vettori**. Impareremo due modi equivalenti: il **metodo punta-coda** e la **regola del parallelogramma**

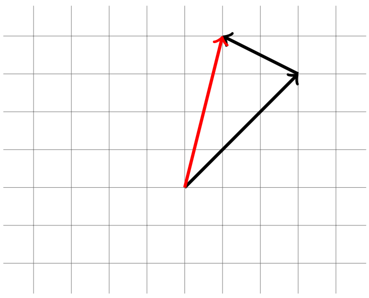
La figura rappresenta i vettori di due forze applicate a un punto - vogliamo trovare la loro somma, ovvero la **forza risultante**:



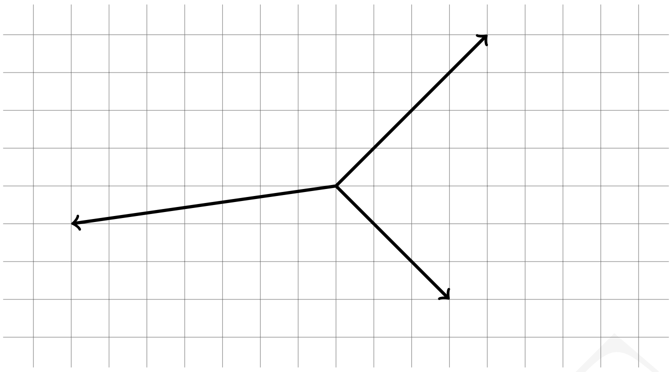
Per eseguire la somma graficamente con **il metodo punta-coda**, prima di tutto trasliamo uno dei vettori (lo spostiamo lasciando invariata la sua direzione), facendo coincidere l'inizio di uno con la fine dell'altro:



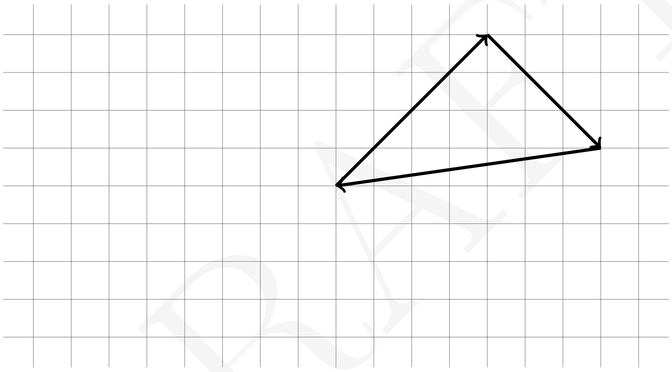
La somma dei due vettori è il vettore che collega il punto iniziale del primo con il punto finale del secondo:



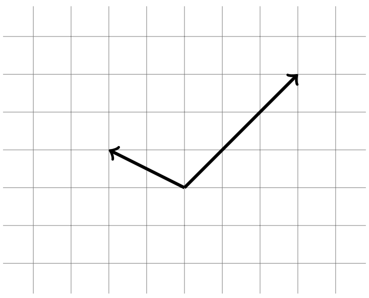
Vediamo un altro esempio:

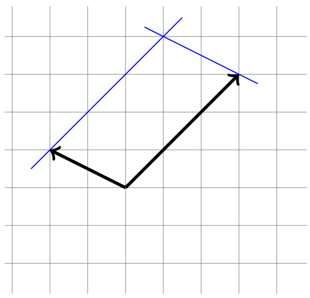


Trasliamo due vettori in modo che siano uno di seguito all'altro:

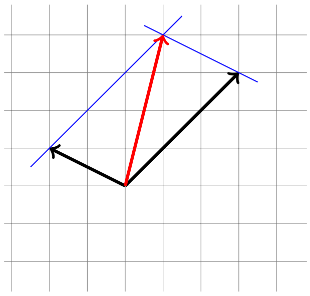


Il punto finale del percorso coincide con il punto iniziale! Abbiamo trovato tre vettori che sommati danno il vettore nullo. In questo caso si dice che **le forze sono in equilibrio**. Un altro modo per effettuare la somma graficamente è usare la **regola del parallelogramma**. Riprendiamo il primo esempio, e costruiamo un parallelogramma (un quadrilatero coi lati opposti paralleli) usando i due vettori:





La somma dei due vettori è **la diagonale del parallelogramma** :

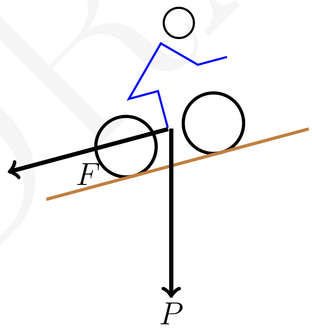


1.3 Scomposizione dei vettori

Quando con la bici andiamo in salita, ci accorgiamo subito che più la pendenza è forte, più fatichiamo. La forza che ci tira indietro è parallela alla strada, non ci fa staccare dall'asfalto.

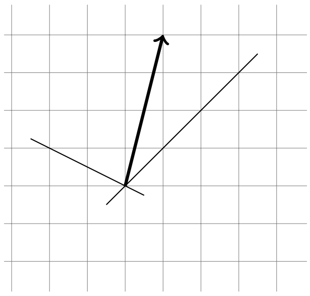
Se la strada è orizzontale, non avvertiamo forze che ci tirano indietro. Man mano che aumenta la pendenza, la forza che ci tira indietro aumenta. E' chiaro che la forza dipende dalla pendenza della strada. Da cosa altro dipende? L'unica altra forza in gioco è la forza peso, quindi, dipende da quella (che è sempre verticale).

Quindi, dobbiamo trovare una forza parallela alla strada, che dipenda dalla pendenza della strada e dal peso. Cioè dobbiamo trovare la **componente** del peso parallela alla strada.

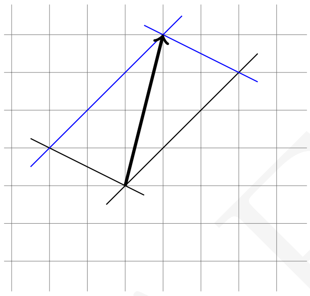


Trovare le componenti di un vettore significa **scomporlo**: un vettore si può **scomporre** in due vettori che abbiano direzioni prefissate. Niente di difficile, è l'operazione inversa della somma di vettori che abbiamo visto prima, con la **regola del parallelogramma**. I vettori che troveremo, se sommati, danno come risultato il vettore originale.

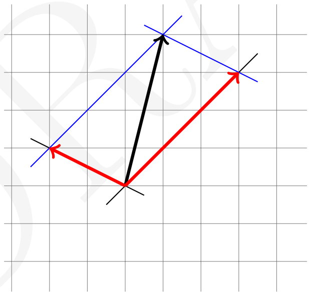
La figura mostra un vettore, e le due direzioni lungo le quali lo vogliamo scomporre:



Costruiamo il parallelogramma che ha per diagonale il nostro vettore:



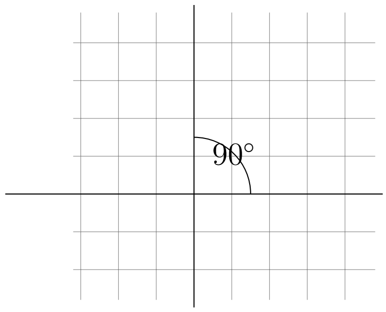
I vettori in rosso sono i due vettori nei quali lo possiamo scomporre:



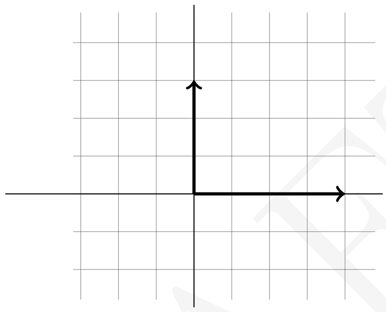
e sono proprio quelli che abbiamo sommato nel paragrafo 1.2 .

1.4 Un modo speciale di scomporre i vettori

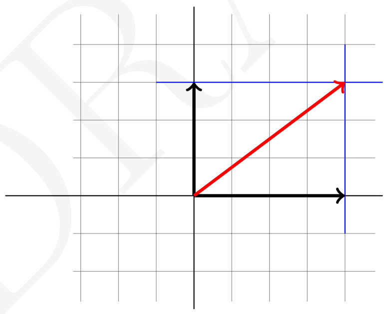
Due direzioni sono **perpendicolari** (o **ortogonali**) quando formano un angolo di 90° fra di loro, come le rette in figura:



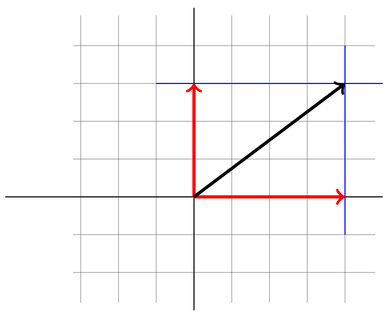
Proviamo a sommare due vettori che hanno queste direzioni:



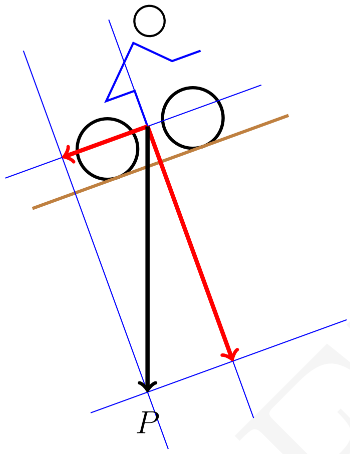
Il parallelogramma diventa un **rettangolo**, in rosso il vettore somma:



La figura sotto mostra l'operazione inversa (la **scomposizione** di un vettore lungo due direzioni perpendicolari) :



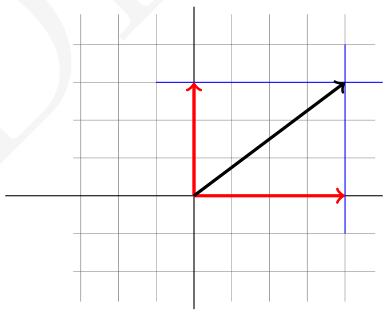
Torniamo alla bici e vediamo come possiamo scomporre il peso - dovevamo trovare la **componente parallela alla strada**. L'altra componente la scegliamo **perpendicolare alla strada**. Disegniamo le due direzioni parallela e perpendicolare, costruiamo il parallelogramma e troviamo i vettori in rosso:



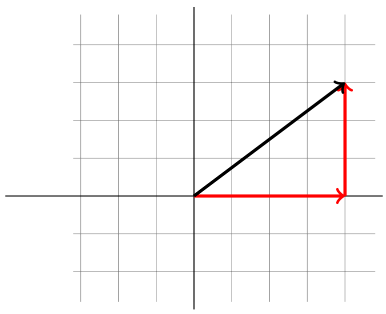
1.5 I vettori come coppia di movimenti

Fino adesso abbiamo disegnato i vettori su una carta quadrettata, ma non abbiamo un modo per descriverli a chi non vede il nostro foglio.

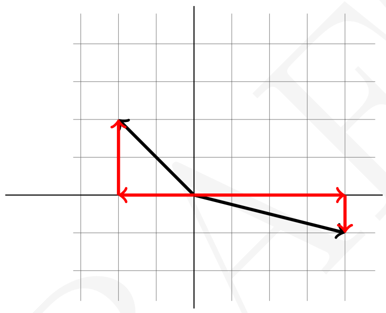
Proviamo a trovare un modo per descrivere un vettore. Per prima cosa, scomponiamolo in due direzioni ortogonali:



Adesso, trasliamo il secondo vettore (ricordate il metodo punta-coda?):



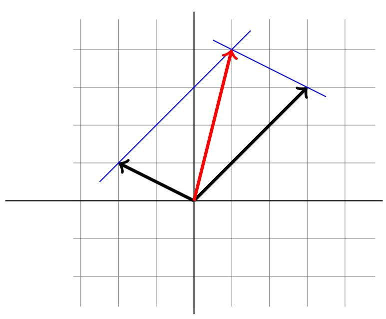
Per descrivere il vettore, possiamo dire: **parti dalla coda, vai a destra per quattro quadretti e vai in su per tre quadretti.** Scriviamo di quanti quadretti ci spostiamo a destra e in su in questo modo: $(4, 3)$. Se vado a sinistra o in giù, metto davanti un segno - :



I due vettori neri sono: **1) parti dalla coda, vai a sinistra per due quadretti e vai in su per due quadretti. 2) parti dalla coda, vai a destra per quattro quadretti e vai in giù per un quadretto** . Quindi: $(-2, 2)$ e $(4, -1)$.

1.6 Somma di vettori con i movimenti

Nel paragrafo 1.2 avevamo sommato i due vettori neri, ottenendo il rosso:



Possiamo scrivere i vettori neri come $(3,3)$ ("a destra di tre e su di tre") e $(-2,1)$ ("a sinistra di due e su di uno"). Il rosso è $(1,4)$. ("a destra di uno e su di quattro").

Pensa adesso al metodo punta-coda. Per sommare i due vettori abbiamo seguito questo percorso:

vai a destra di tre quadratini, su di tre, a sinistra di due, su di uno.

E ottieni il vettore rosso. Adesso riscriviamo la stessa cosa avvicinando i movimenti destra e sinistra e su e giù:

vai a destra di tre quadratini, a sinistra di due, su di tre, su di uno.

Ottieni ancora il vettore rosso. Adesso scriviamo prima della virgola i movimenti destra e sinistra e dopo i su e giù:

$$(3-2, 3+1)$$

Se fai la somma dei numeri, trovi

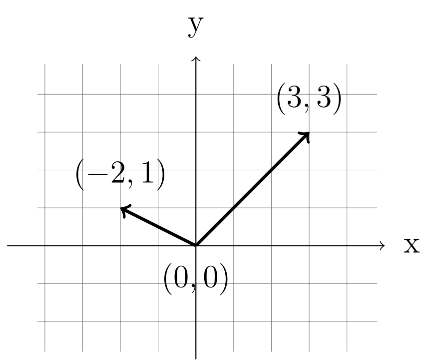
$$(3-2, 3+1) = (1,4)$$

Se mettiamo tutto insieme, abbiamo imparato a sommare i vettori conoscendo i movimenti che devo fare per disegnarli:

$$(3,3) + (-2,1) = (3-2, 3+1) = (1,4)$$

1.7 Il piano cartesiano

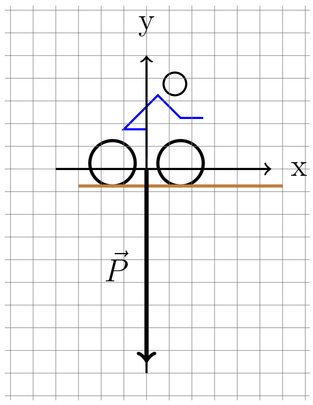
Adesso che abbiamo visto come disegnare i vettori con gli spostamenti, introduciamo una cosa "difficile" che in realtà è un altro modo di vedere quello che abbiamo già imparato: un **piano cartesiano** è il foglio quadrettato dove abbiamo fatto gli spostamenti, dove si indicano con x gli spostamenti destra - sinistra e con y gli spostamenti alto-basso, partendo dal punto con $x = 0$ e $y = 0$, cioè $(0,0)$, che si chiama **origine**:



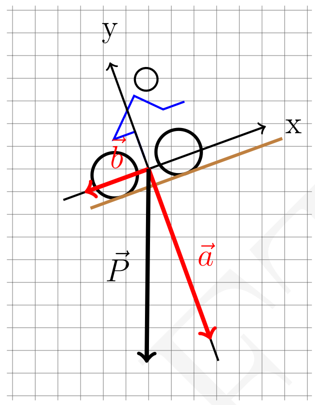
Guarda come possiamo disegnare la bicicletta che si muove e come cambiano le coordinate del vettore peso $\vec{P}$ e dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ nei quali lo possiamo scomporre.

I paragrafi che seguono serviranno a capire come calcolare queste coordinate. Quello che per adesso non sappiamo calcolare è segnato con ??.

Se va in salita, possiamo ruotare l'asse x e l'asse y in modo che la bici si muova sempre lungo l'asse x e il peso sia sempre verticale:

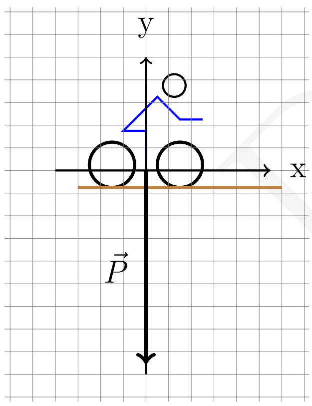


$\vec{P} = (0, -P)$

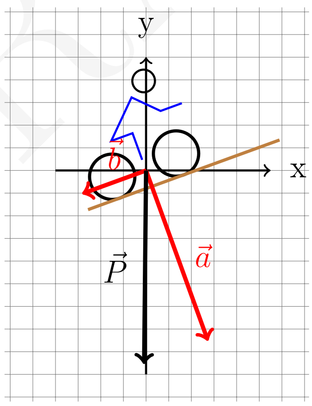


$\vec{P} = (??, ??)$, $\vec{a} = (0, ??)$, $\vec{b} = (??, 0)$

Oppure, possiamo lasciare fermi gli assi e disegnare la bici che va in salita:



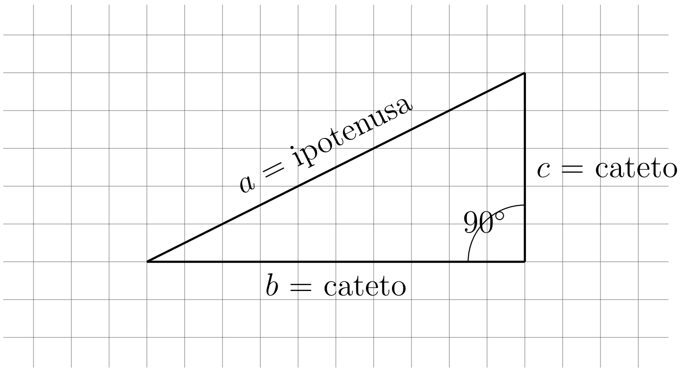
$\vec{P} = (0, -P)$



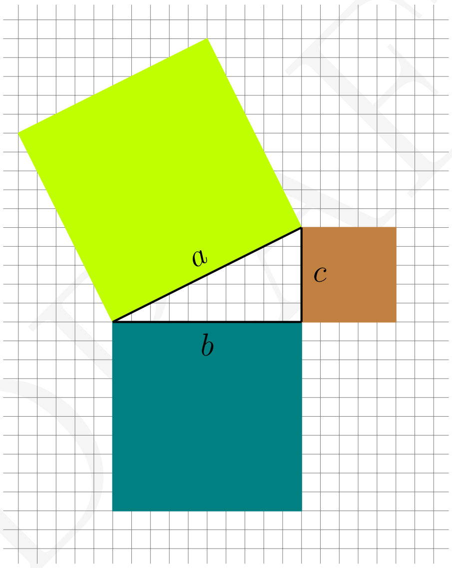
$\vec{P} = (0, -P)$, $\vec{a} = (??, ??)$, $\vec{b} = (??, ??)$

1.8 Il triangolo rettangolo

Un'altra cosa che dobbiamo studiare bene è il **triangolo rettangolo**, cioè un triangolo che ha un angolo retto. Il lato lungo si chiama **ipotenusa**, gli altri lati **cateti**

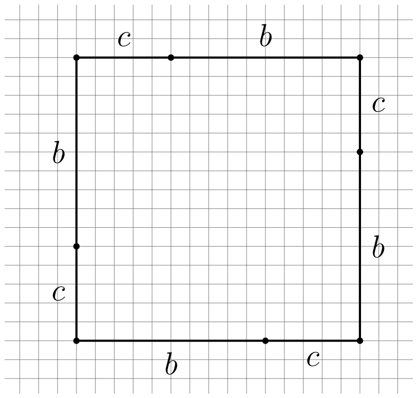


E' importante capire il **teorema di Pitagora: l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa - in verde chiaro - è uguale alla somma dell'area dei quadrati costruiti sui cateti - in marrone e verde scuro**

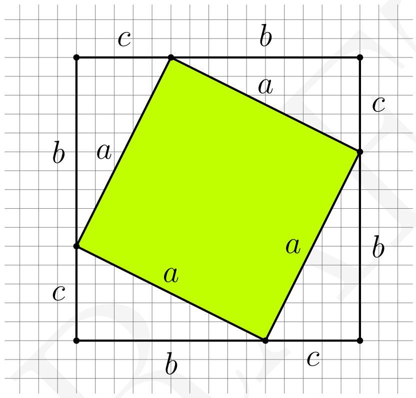


Vediamo una dimostrazione che potrai fare colorando e ritagliando la carta. Intanto, disegna i due quadrati verde e marrone che ci serviranno dopo.

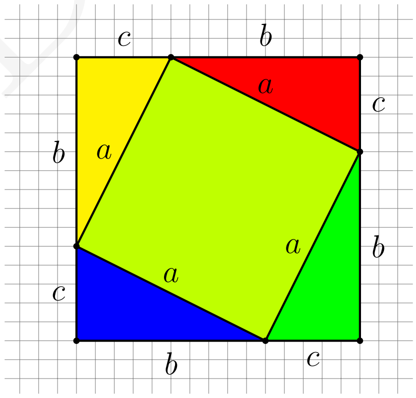
Disegniamo in questo modo un quadrato di lato $b + c$:



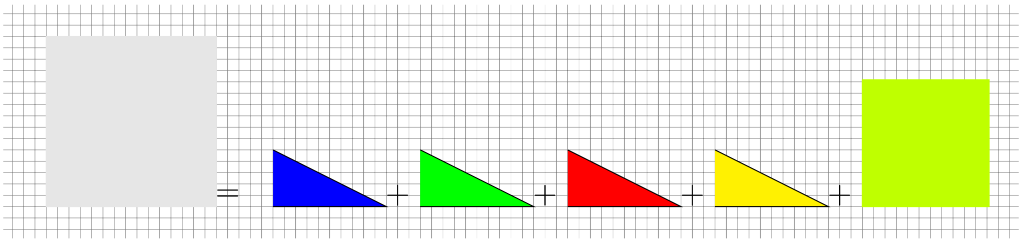
Collega i punti. In mezzo vedi che c'e' il quadrato di lato a, l'ipotenusa:



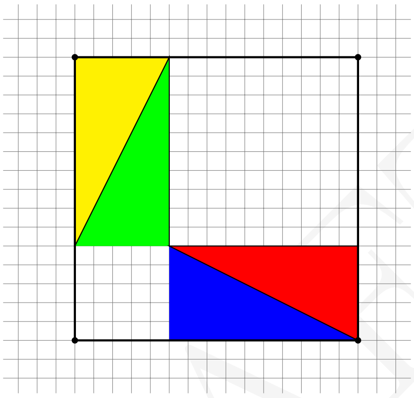
Ci sono anche quattro triangoli uguali a quello da cui siamo partiti. Colorali con colori diversi:



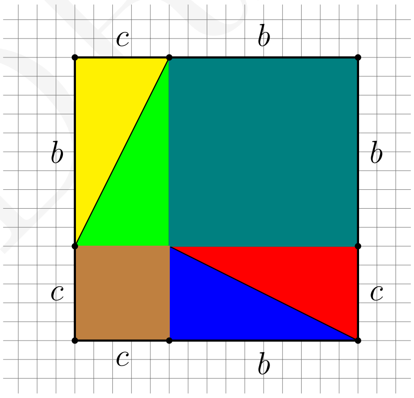
Il quadrato grande che abbiamo disegnato è quindi la somma dei 4 triangoli e del quadrato di lato a:



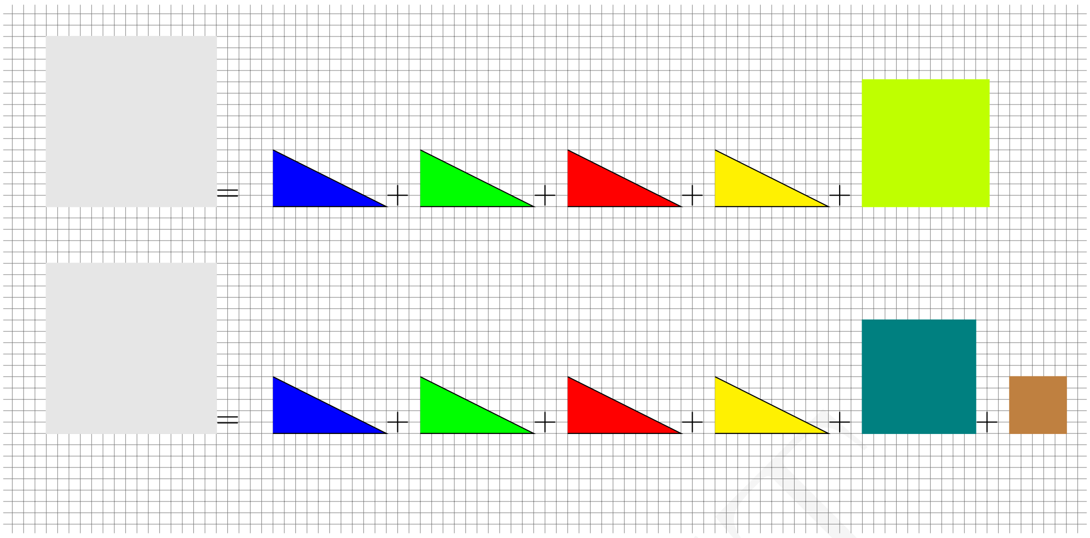
Adesso, ritaglia i triangoli e riempi il quadrato grande in questo modo:



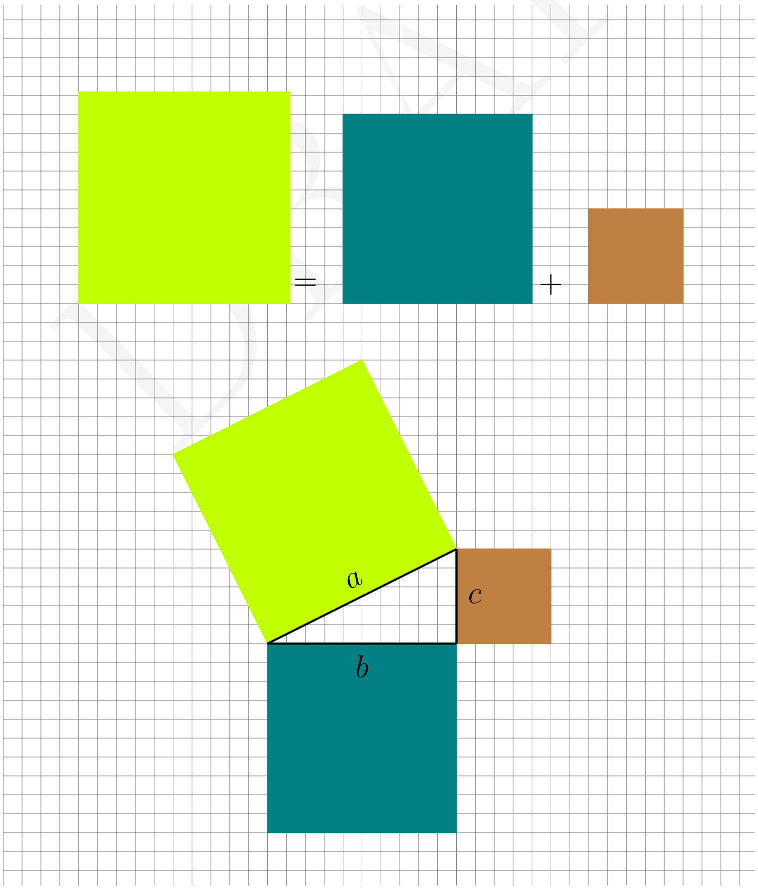
Ti ricordi la prima figura dove c'erano i quadrati marrone e verde scuro? Guarda cosa abbiamo ottenuto:



Possiamo scrivere in un altro modo l'area del quadrato grande, che deve essere uguale a quella che abbiamo disegnato sopra:



Dato che le due somme sono uguali, e quindi devono essere composte con figure di area uguale, l'equazione non è troppo difficile e ci dice che deve essere vero il **teorema di Pitagora**:

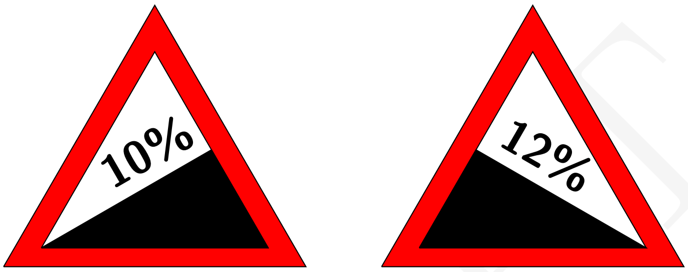


D'ora in avanti ci servirà un po' di matematica complicata.... dobbiamo scrivere il Teorema di Pitagora così:

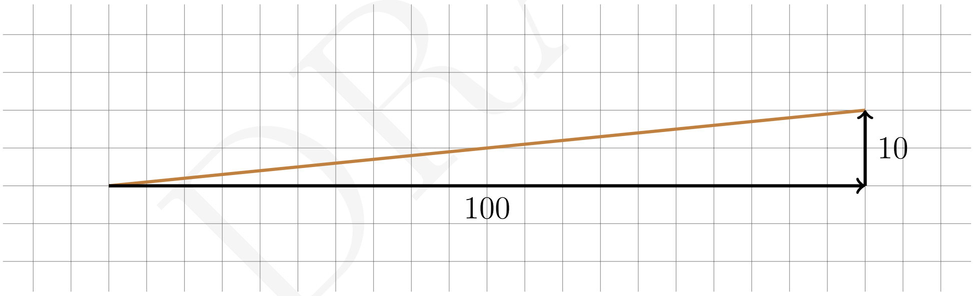
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

1.9 La pendenza della strada

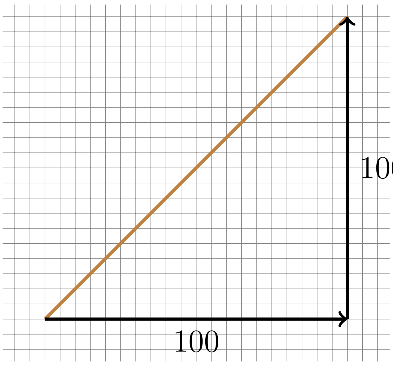
Lungo le strade di montagna, prima delle salite o delle discese troviamo cartelli come questo che ci indicano la **pendenza** della strada



La pendenza della strada si indica con m e indica **di quanti metri si sale ogni 100 metri di percorso orizzontale**. Quindi, una pendenza $m = 10\%$ indica che **ogni 100 metri di percorso orizzontale, si sale di 10 metri**:



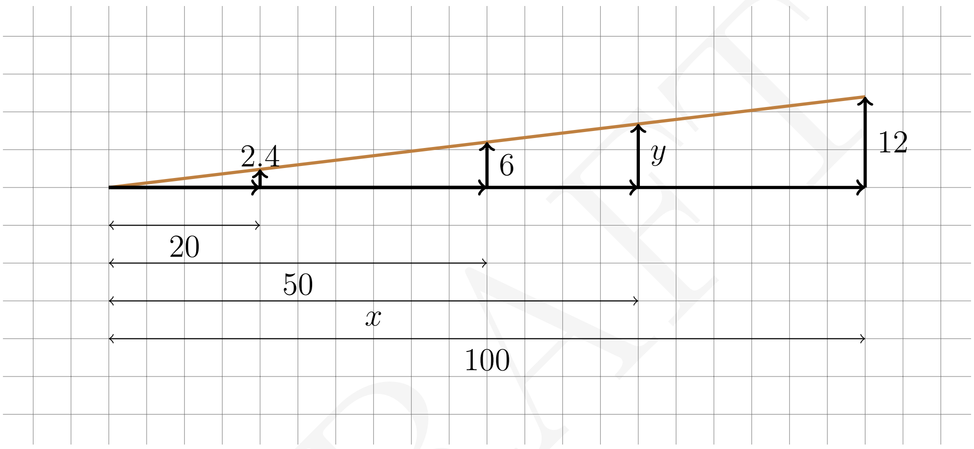
Osserva che una pendenza $m = 100\%$ **non** indica una salita verticale ma una salita a 45°.



Un altro modo per scrivere la pendenza è come numero con la virgola: ad esempio $m = 12\% = 12/100 = 0.12$, $m = 4\% = 4/100 = 0.04$.

In bicicletta non ci spostiamo sempre di 100 metri. Se ci spostiamo in orizzontale di x metri, e la strada ha pendenza m, di quanto siamo saliti? Ad esempio, con $m = 12\%$:

- ogni 100 metri di percorso orizzontale, si sale di 12 metri
- ogni 20 (=100/5) metri di percorso orizzontale, si sale di 2.4 metri (=12/5)
- ogni 50 (=100/2) metri di percorso orizzontale, si sale di 6 metri (=12/2)



Però, guarda i numeri che abbiamo trovato:

- $12/100 = 0.12$
- $2.4/20 = 0.12$
- $6/50 = 0.12$

Quindi sarà sicuramente:

- $y/x = 0.12$

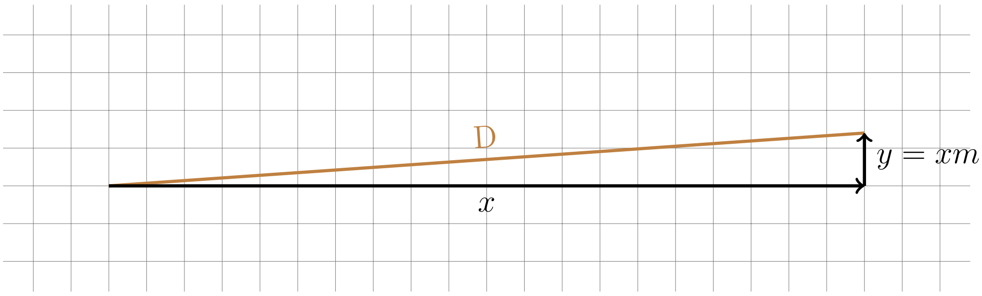
Quindi, **siamo saliti di $y = x * m$ metri**.

In realtà però quello che abbiamo trovato non è molto pratico... Noi sappiamo quanta strada percorriamo lungo la strada, non in orizzontale.

I problemi che dobbiamo risolvere sono del tipo:

Un ciclista percorre D metri su una salita con pendenza m. Di quanto è salito?

Con quello che abbiamo appena imparato, è facile disegnare:



Adesso, osserviamo che in effetti abbiamo disegnato un **triangolo rettangolo**. E abbiamo studiato il **teorema di Pitagora**.

$$D^2 = x^2 + (xm)^2 \Rightarrow D^2 = x^2 + (x^2m^2) \Rightarrow D^2 = x^2(1+m^2)$$

$$x^2 = \frac{D^2}{1+m^2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{D^2}{1+m^2}} \Rightarrow x = D\sqrt{\frac{1}{1+m^2}}$$

$$y = mD\sqrt{\frac{1}{1+m^2}}$$

Per fare un esempio, se si percorre un chilometro su una strada con pendenza al 10%, ci si alza di 99.5 metri:

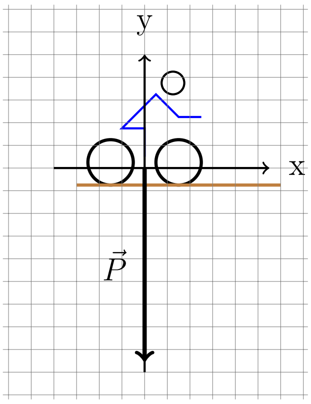
$$y = 0.1 * 1000\sqrt{\frac{1}{1+0.1^2}} = 100\sqrt{\frac{1}{1.01}} \approx 99.5$$

Se si percorre un chilometro su una strada con pendenza al 20%, ci si alza di 196 metri:

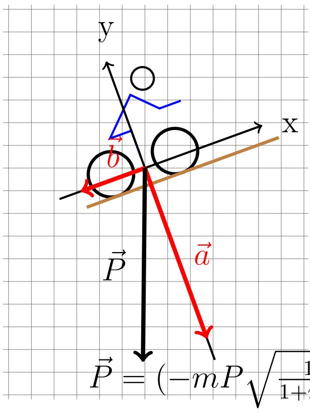
$$y = 0.2 * 1000\sqrt{\frac{1}{1+0.2^2}} = 200\sqrt{\frac{1}{1.04}} \approx 196$$

1.10 Mettiamo tutto insieme

Se abbiamo il peso P e la pendenza m, possiamo scomporre il peso come abbiamo visto nei paragrafi precedenti. Quando avremo delle nozioni di trigonometria, le formule saranno più semplici.

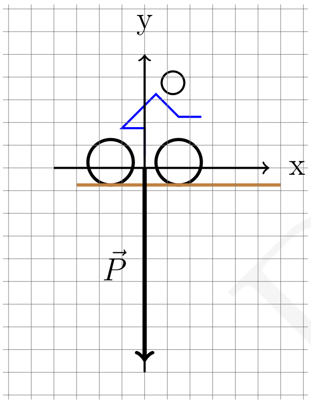


$\vec{P} = (0, -P)$

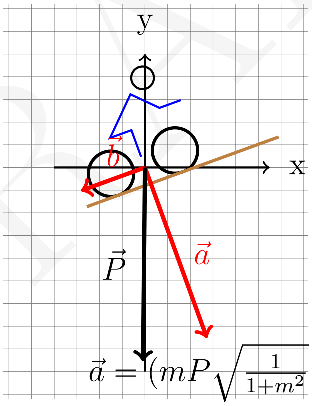


$$\vec{P} = (-mP\sqrt{\tfrac{1}{1+m^2}}, -P\sqrt{\tfrac{1}{1+m^2}})$$
$$\vec{a} = (0, -P\sqrt{\tfrac{1}{1+m^2}})$$
$$\vec{b} = (-mP\sqrt{\tfrac{1}{1+m^2}}, 0)$$

Questo che segue è un esempio per fare esercizio, di fatto non serve per i problemi della bici:



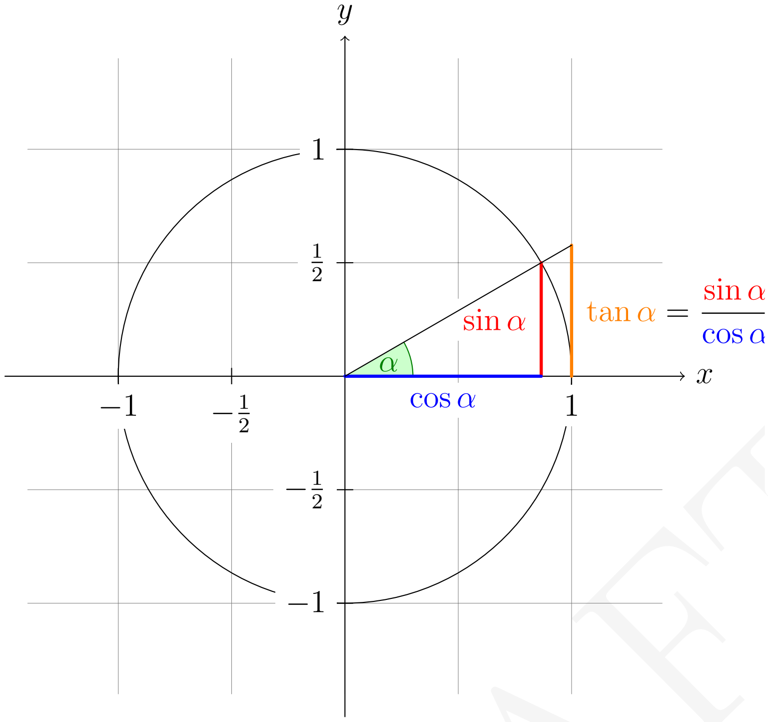
$\vec{P} = (0, -P)$



$$\vec{P} = (0, -P)$$
$$\vec{a} = (mP\sqrt{\tfrac{1}{1+m^2}}\sqrt{\tfrac{1}{1+m^2}}, -P\sqrt{\tfrac{1}{1+m^2}}\sqrt{\tfrac{1}{1+m^2}}) =$$
$$= (\tfrac{mP}{1+m^2}, -\tfrac{P}{1+m^2})$$
$$\vec{b} = (-\tfrac{mP}{1+m^2}, mP\sqrt{\tfrac{1}{1+m^2}}m\sqrt{\tfrac{1}{1+m^2}}) =$$
$$= (-\tfrac{mP}{1+m^2}, -\tfrac{m^2P}{1+m^2}) =$$

1.11 Seno, coseno, tangente

Disegniamo un cerchio di raggio 1, come in figura. Disegniamo un raggio, inclinato di un angolo α. Introduciamo la **definizione** di seno, coseno e tangente dell'angolo α.



La figura illustra il significato geometrico (per noi, la **definizione**) di seno, coseno e tangente dell'angolo α.
Per il Teorema di Pitagora, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$